

Navrhování experimentů a jejich analýza

Eva Jarošová

Obsah

- Základní techniky
- Vyhodnocení výsledků
- Experimenty s jedním zkoumaným faktorem
- Faktoriální experimenty
 - úplné 2^N
 - dílčí 2^{N-p}
- Experimenty pro studium variability
 - Hierarchické experimenty
 - MSA
- Experimenty pro hledání optimálních podmínek
- Experimenty pro robustní návrh

Techniky experimentování

- **Znáhodnění**

Účel – zamezit směřování efektu zkoumaného faktoru s jiným systematickým vlivem

- Úplné znáhodnění
- Znáhodnění v rámci bloků
- Dělené oblasti (split-plot)

- **Replikace**

Účel - odhad experimentální chyby a směrodatné chyby efektů pro potřeby testování

- **Uspořádání do bloků**

Účel – zmenšení experimentální chyby

Vyhodnocení výsledků

Cíl:

1. najít faktory, které mají vliv na odezvu
 - na úroveň hodnot (střední hodnotu)
 - na variabilitu hodnot (rozptyl)
2. u důležitých faktorů určit optimální nastavení

Rozhodování na základě výběru
statistický test hypotézy

H_0 : faktor nemá vliv

H_1 : faktor má vliv

Riziko chybného závěru

riziko chyby I. druhu volíme (hladina významnosti)

riziko chyby II. druhu závisí na

- počtu replikací
- velikosti experimentální chyby

Jeden zkoumaný faktor

Často kategoriální faktor
(dodavatel, stroj, operátor, laboratoř)

Výsledky roztríděny do skupin podle úrovní faktoru

Porovnání skupinových průměrů pomocí
t-testu (2 úrovně faktoru)
ANOVA

V případě nebezpečí velké experimentální chyby – vhodné uspořádání do bloků

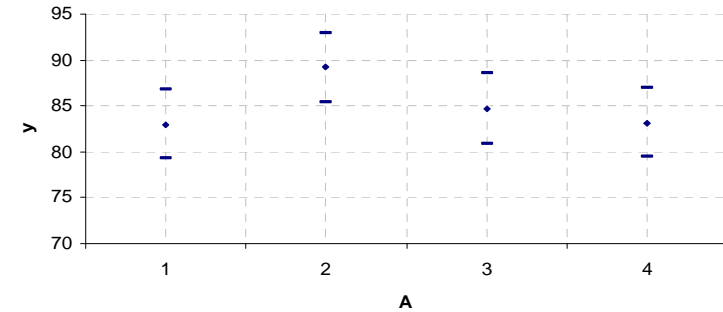
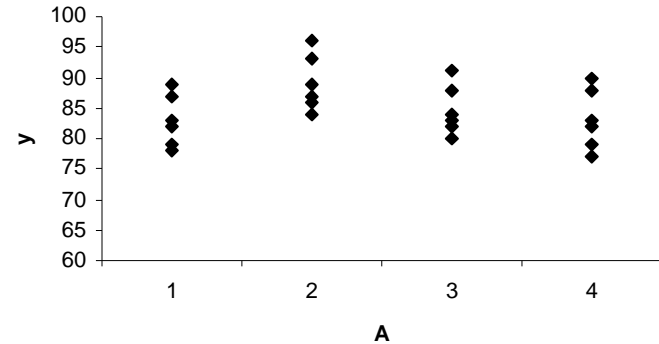
Příklad 2.6

Úplné znáhodnění

ANOVA

Zdroj variability	SS	St. vol	MS	F	Hodnota P
Faktor A	149	3	49,66667	2,440622	0,094191
Reziduální	407	20	20,35		
Celkový	556	23			

Excel ANOVA: Jeden faktor

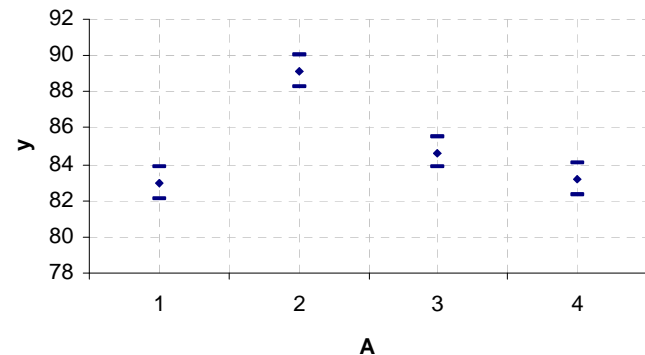


Uspořádání do bloků

ANOVA

Zdroj variability	SS	St.vol	MS	F	Hodnota P
Faktor A	149	3	49,66667	49,66667	5,03E-08
Bloky	392	5	78,4	78,4	3,28E-10
Reziduální	15	15	1		
Celkový	556	23			

Excel ANOVA: Dva faktory bez opakování



Faktoriální experimenty 2^N

Cíl: zkoumání vlivu několika faktorů najednou

Nejrozšířenější v praxi

Vhodné v případě kvantitativních faktorů

Uspořádání umožňuje kvantifikovat interakce

Další využití: hledání optimálních podmínek
(doplnění dalšími body)

MSA

robustní návrh

Příklad 3.2

Zkoumá se vliv tří faktorů na účinnost praní.

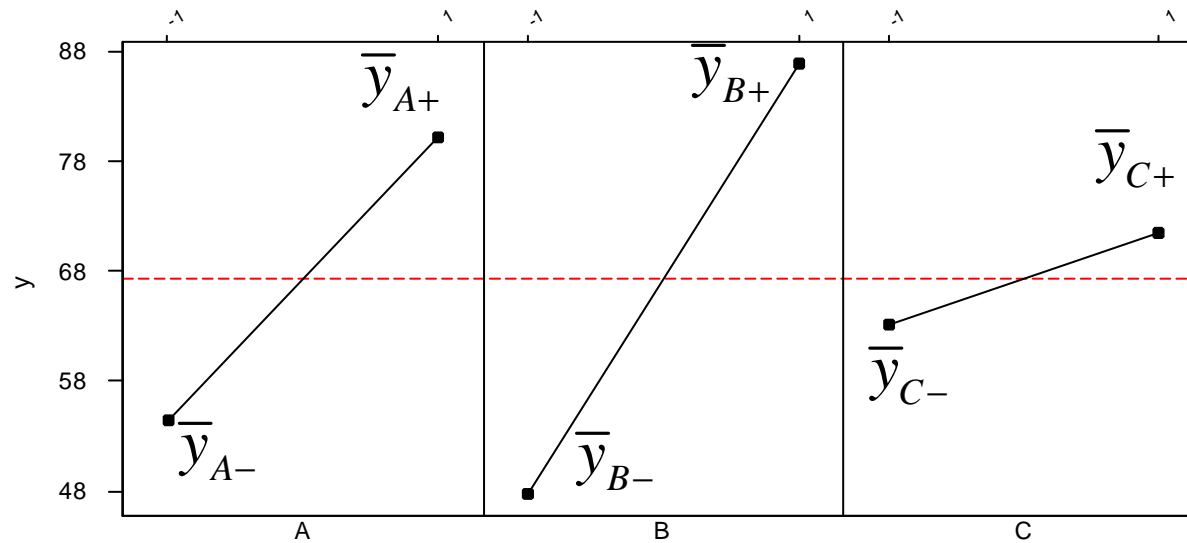
A – koncentrace prášku

B – teplota

C – čas

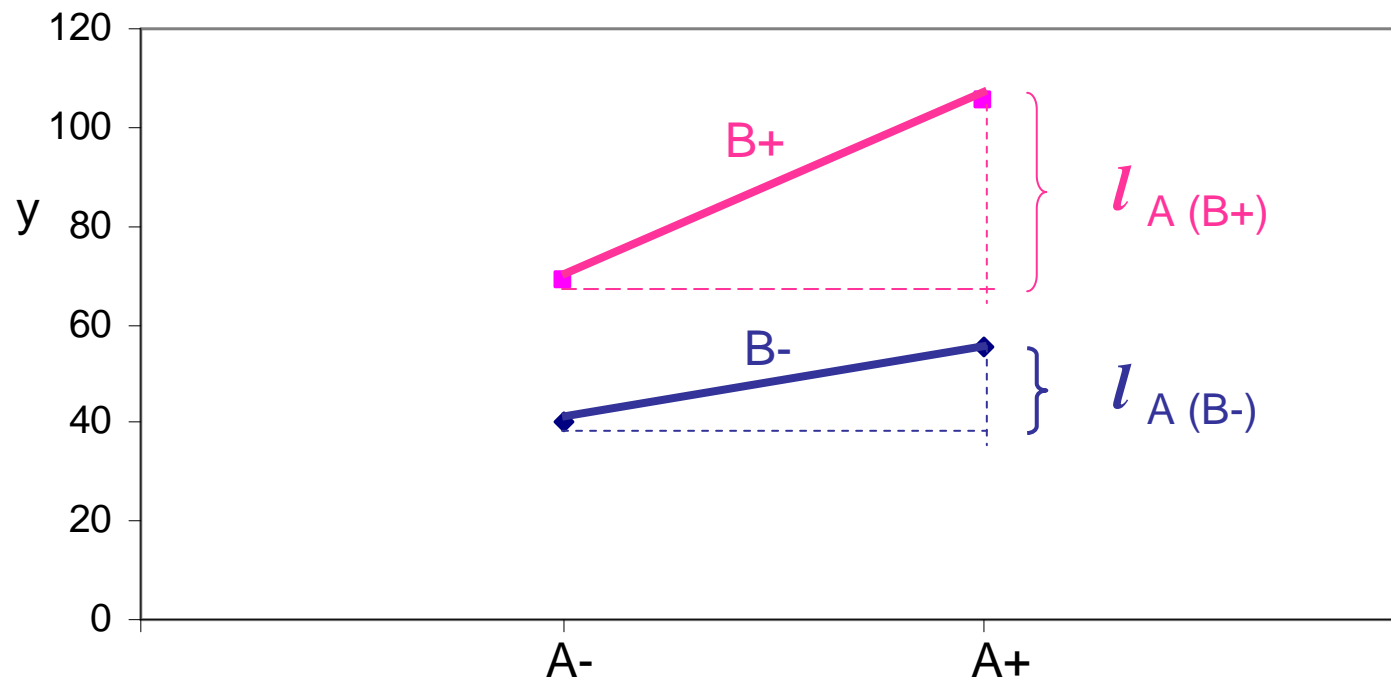
	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	y	
	–	–	–	+	+	+	–	37	45
	+	–	–	–	–	+	+	48	56
	–	+	–	–	+	–	+	59	68
	+	+	–	+	–	–	–	102	90
	–	–	+	+	–	–	+	43	35
	+	–	+	–	+	–	–	63	54
	–	+	+	–	–	+	–	71	77
	+	+	+	+	+	+	+	122	107
průměr +	80,250	87,000	71,500	72,625	69,375	70,375	67,250		
průměr –	54,375	47,625	63,125	62,000	65,250	64,250	67,375		
efekt	25,875	39,375	8,375	10,625	4,125	6,125	–0,125		

Odhad efektů a grafické znázornění



$$l_A = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} \quad l_B = \bar{y}_{B+} - \bar{y}_{B-} \quad l_C = \bar{y}_{C+} - \bar{y}_{C-}$$

Interakce faktorů A a B



$l_{A(B-)}$ podmíněný efekt faktoru A při úrovni B-

$l_{A(B+)}$ podmíněný efekt faktoru A při úrovni B+

nejsou-li podmíněné efekty stejné, existuje interakce

Odhad interakce

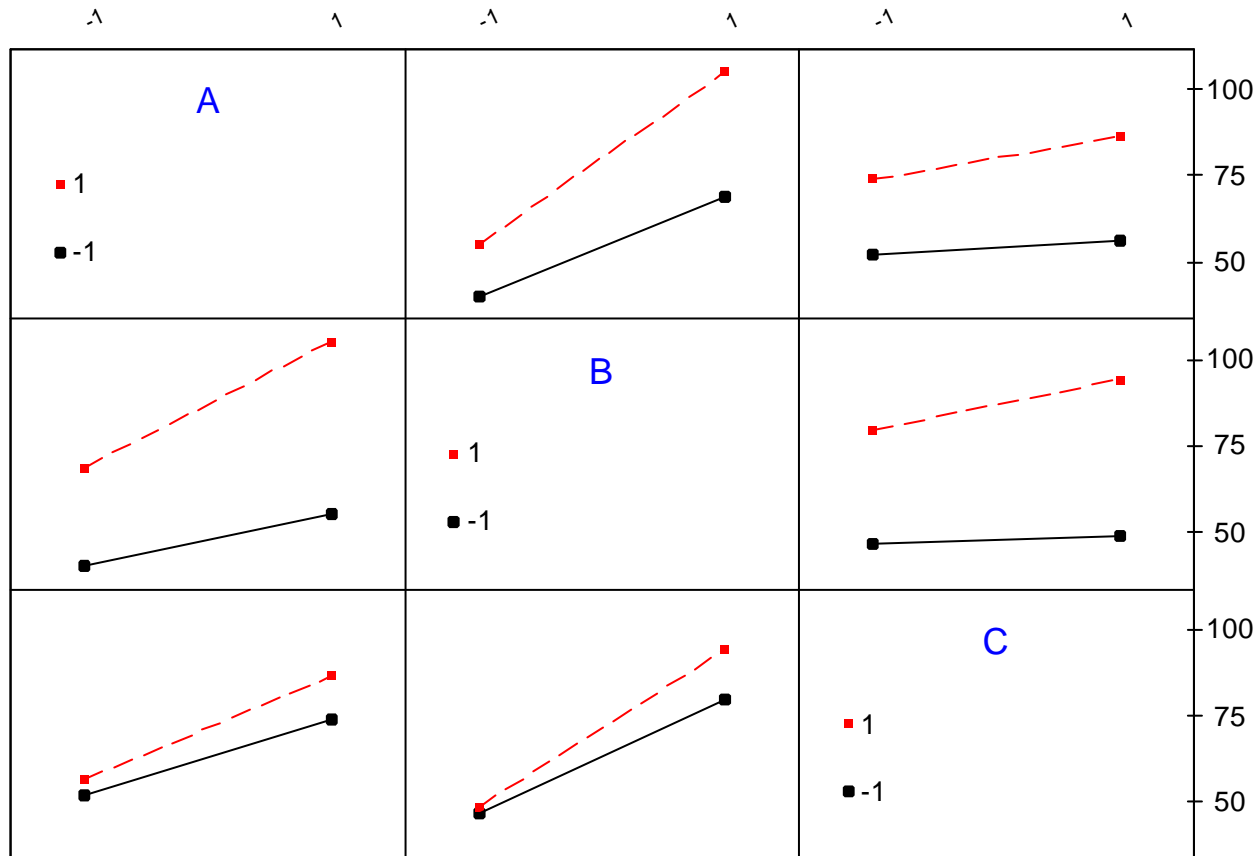
$$l_{AB} = \frac{1}{2}(l_{A(B+)} - l_{A(B-)})$$

$$l_{AB} = \frac{1}{2}[(\bar{y}_{A+B+} - \bar{y}_{A-B+}) - (\bar{y}_{A+B-} - \bar{y}_{A-B-})]$$

$$l_{AB} = \frac{1}{2}[(\bar{y}_{A+B+} + \bar{y}_{A-B-}) - (\bar{y}_{A-B+} + \bar{y}_{A+B-})]$$

$$l_{AB} = \bar{y}_{(AB)+} - \bar{y}_{(AB)-}$$

Grafy interakcí



Tabulka ANOVA

Analysis of Variance for y					
Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	2678,1	2678,1	56,45	0,000
B	1	6201,6	6201,6	130,73	0,000
C	1	280,6	280,6	5,91	0,041
A*B	1	451,6	451,6	9,52	0,015
A*C	1	68,1	68,1	1,43	0,265
B*C	1	150,1	150,1	3,16	0,113
A*B*C	1	0,1	0,1	0,00	0,972
Error	8	379,5	47,4		
Total	15	10209,4			

Interpretace:

Je-li p-hodnota (p) menší než zvolená hladina významnosti α , prohlásíme efekt za významný.

Jedna replika návrhu 2^N

Chybí stupně volnosti pro odhad experimentální chyby

Postup

redukce modelu – sloučení nejmenších efektů
pro odhad experimentální chyby

identifikace efektů

normální graf efektů

polonormální (half-normal) graf efektů

Paretův diagram

Příklad 3.4

Zkoumá se vliv tří faktorů na odstín barvené látky.

A – materiál

B – teplota

C – tlak v sušárně

std. pořadí	skut. pořadí	A	B	C	<i>y</i>
1	1	-	-	-	189
2	4	+	-	-	228
3	8	-	+	-	195
4	6	+	+	-	200
5	2	-	-	+	218
6	3	+	-	+	259
7	7	-	+	+	238
8	5	+	+	+	241

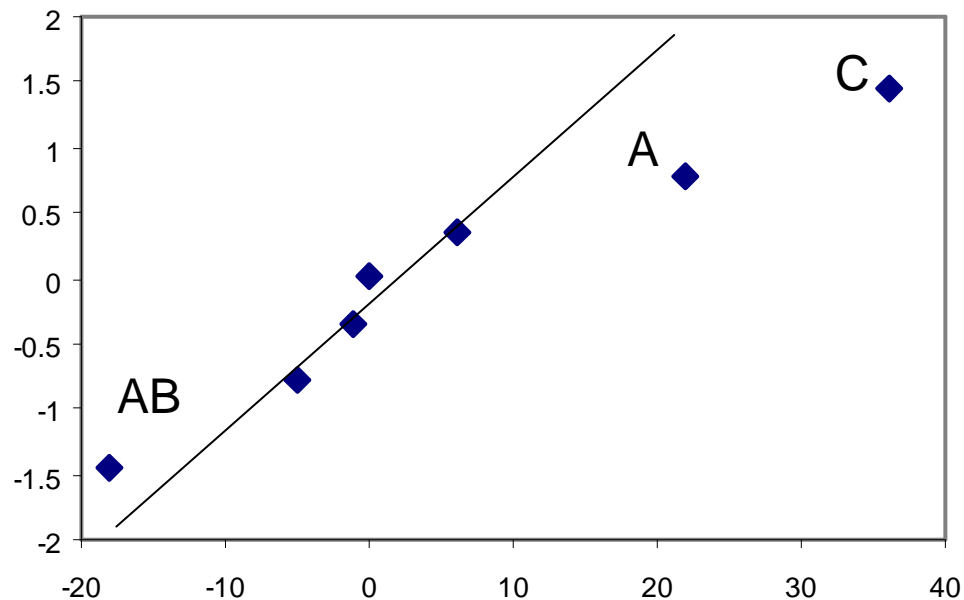
Matrice modelu se všemi efekty

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	y
	-	-	-	+	+	+	-	189
	+	-	-	-	-	+	+	228
	-	+	-	-	+	-	+	195
	+	+	-	+	-	-	-	200
	-	-	+	+	-	-	+	218
	+	-	+	-	+	-	-	259
	-	+	+	-	-	+	-	238
	+	+	+	+	+	+	+	241
průměr +	232	218,5	239	212	221	224	220,5	
průměr -	210	223,5	203	230	221	218	221,5	
efekt	22	-5	36	-18	0	6	-1	

Normální pravděpodobnostní graf efektů

efekt	AB	B	ABC	AC	BC	A	C
l_i	-18	-5	-1	0	6	22	36
pořadí i	1	2	3	4	5	6	7
u_i	-1,465	-0,792	-0,366	0	0,366	0,792	1,465

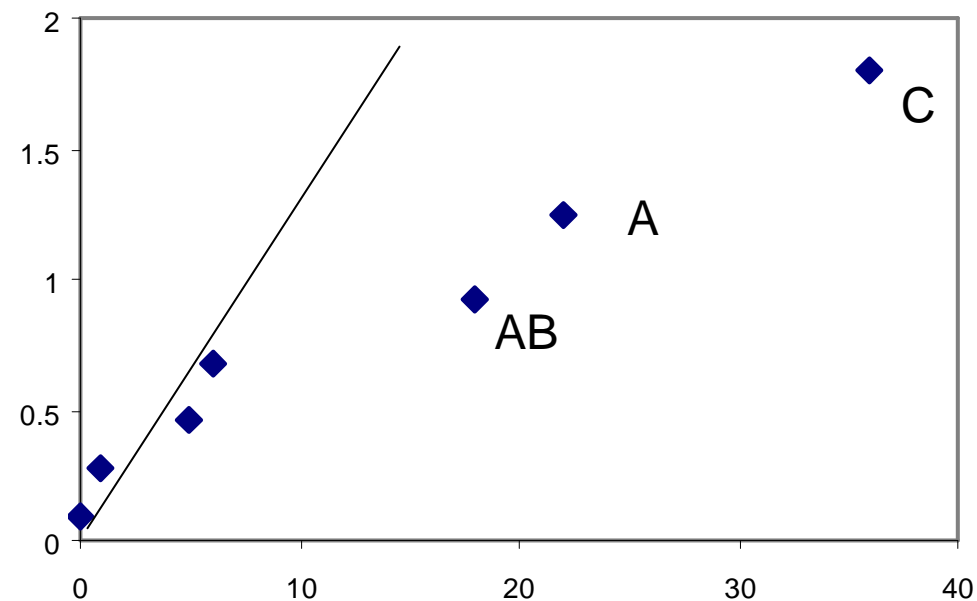
$$u_i = \Phi^{-1} \left(\frac{i - 0,5}{2^N - 1} \right)$$



Polonormální pravděpodobnostní graf efektů

efekt	AC	ABC	B	BC	AB	A	C
$ l_i $	0	1	5	6	18	22	36
pořadí i	1	2	3	4	5	6	7
u_i^*	0,090	0,272	0,464	0,674	0,921	1,242	1,803

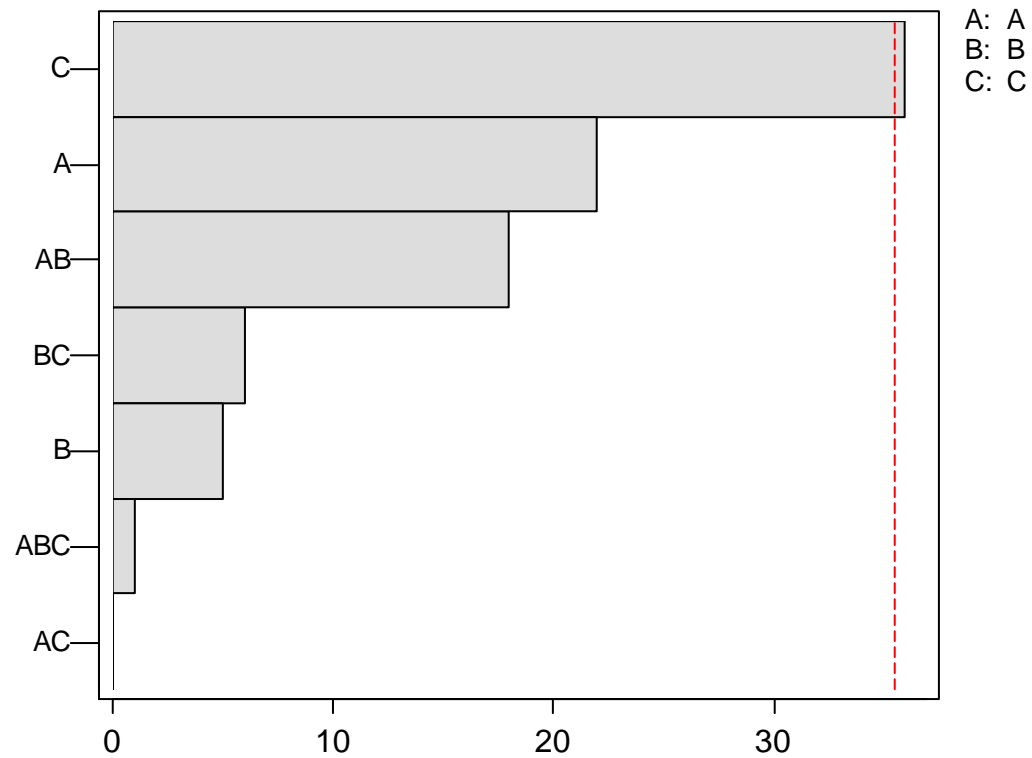
$$u_i^* = \Phi^{-1}\left(0,5 + 0,5 \frac{i-0,5}{2^N - 1}\right)$$



Paretův graf efektů

Pareto Chart of the Effects

(response is y, Alpha = ,05)



Test s použitím robustního odhadu PSE (Lenth)

$$PSE = 1,5 \operatorname{median}_{\{|l_j| < 2,5s_0\}} |l_j|$$

$$s_0 = 1,5 \operatorname{median} |l_j|$$

$$t_{PSE,j} = \frac{|l_j|}{PSE}$$

tabulky kritických hodnot pro hladinu významnosti α a počet testovaných efektů l_j (např. Wu, Hamada)

Příklad - zkrácení na polovinu

Návrh 2^{3-1}

Generátor I = ABC

A	B	C	AB	AC	BC	ABC
-	-	-	+	+	+	-
+	-	-	-	-	+	+
-	+	-	-	+	-	+
+	+	-	+	-	-	-
-	-	+	+	-	-	+
+	-	+	-	+	-	-
-	+	+	-	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+

Směšování efektů

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	y
+	-	-	-	-	+	+	y ₁
-	+	-	-	+	-	+	y ₂
-	-	+	+	-	-	+	y ₃
+	+	+	+	+	+	+	y ₄

Stejná znaménka v některých sloupcích

A + BC

B + AC

C + AB

Nemůžeme oddělit hlavní efekt A od interakce BC atd.

Volba návrhu

Nízká znalost procesu

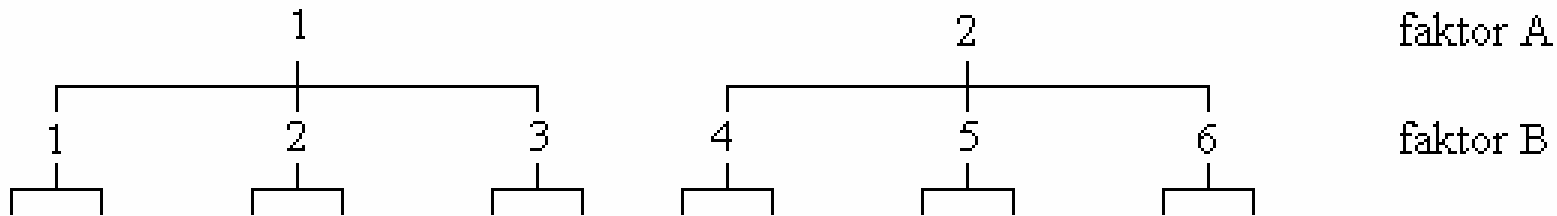
Návrh	Počet faktorů	Počet zkoušek	Rozlišení
2^{3-1}	3	4	III
2^{7-4}	5, 6, 7	8	III
2^{15-11}	8 – 15	16	III

Mírná znalost procesu

Návrh	Počet faktorů	Počet zkoušek	Rozlišení
2^{4-1}	4	8	IV
2^{5-1}	5	16	V
2^{8-4}	6, 7, 8	16	IV
2^{16-11}	9 – 16	32	IV

Hierarchický experiment

Cíl: Identifikace hlavních zdrojů variability



$$y_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma^2$$

↓ ↓ ↓
složky rozptylu

- Odhad složek rozptylu
- Testování jejich významnosti

Odhad složek rozptylu

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Složky rozptylu
faktor A	SS_A	$a - 1$	$MS_A = \frac{SS_A}{a - 1}$	$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{MS_A - MS_{B(A)}}{br}$
faktor B(A)	$SS_{B(A)}$	$a(b - 1)$	$MS_{B(A)} = \frac{SS_{B(A)}}{a(b - 1)}$	$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{MS_{B(A)} - MS_E}{r}$
reziduální	SS_E	$ab(r - 1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{ab(r - 1)}$	$\hat{\sigma}^2 = MS_E$
celkový	SS_T	$abr - 1$		

Lze využít nástroj ANOVA: Dva faktory s opakováním

$$SS_{B(A)} = SS_B + SS_{AB}$$

Analýza systému měření (MSA)

Cíl: určení způsobilosti měřicího systému

rozklad celkové variability na složky příslušné

- rozdílům mezi měřenými jednotkami σ_P^2
- operátorům $\sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2$
- měřicímu přístroji σ_e^2

$$\sigma_T^2 = \sigma_P^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_e^2$$

faktoriální návrh

faktory

operátor - O

jednotka - P

Odhad složek rozptylu

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Složka rozptylu
jednotka P	SS_P	$n - 1$	$MS_P = \frac{SS_P}{n - 1}$	$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{MS_P - MS_{PO}}{kr}$
operátor O	SS_O	$k - 1$	$MS_O = \frac{SS_O}{k - 1}$	$\hat{\sigma}_O^2 = \frac{MS_O - MS_{PO}}{nr}$
interakce PO	SS_{PO}	$(n - 1)(k - 1)$	$MS_{PO} = \frac{SS_{PO}}{(n - 1)(k - 1)}$	$\hat{\sigma}_{PO}^2 = \frac{MS_{PO} - MS_e}{r}$
reziduální	SS_e	$nk(r - 1)$	$MS_e = \frac{SS_e}{nk(r - 1)}$	$\hat{\sigma}_e^2 = MS_e$

Využití ANOVA

<i>Zdroj variability</i>	<i>SS</i>	<i>St. vol.</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Hodnota P</i>	<i>F krit</i>
Operátor	0,000723	1	0,000723	15,21053	0,000889	4,35125
Jednotka	0,006723	9	0,000747	15,72515	3,05E-07	2,392817
Interakce	0,002702	9	0,0003	6,321637	0,000303	2,392817
Dohromady	0,00095	20	4,75E-05			
Celkem	0,011098	39				

Nástroj v Excelu

ANOVA: Dva faktory s opakováním

EVOP

(postupná úprava provozních podmínek)

Cíl: určení optimálních provozních podmínek

Návrh

2^2 nebo 2^3 + centrální bod

Rozdílné techniky experimentování

stále pořadí experimentálních bodů

místo replikací cykly

počet cyklů operativně

Posuzování významnosti efektů pomocí konfidenčních intervalů

Kontrola vzdálenosti od optimálních podmínek

Sekvenční postup

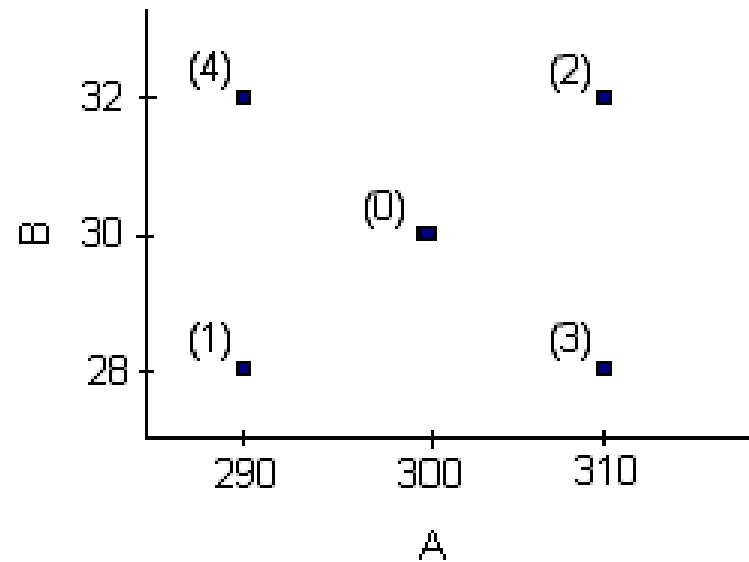
Příklad 5.2

A ... teplota

B ... tlak

y ... výtěžek

odhad efektů



$$A: \frac{1}{2}((2) + (3) - (4) - (1))$$

$$B: \frac{1}{2}((4) + (2) - (1) - (3))$$

$$AB: \frac{1}{2}((1) + (2) - (3) - (4))$$

maximálně 5 – 8 cyklů

Efekt střední hodnoty

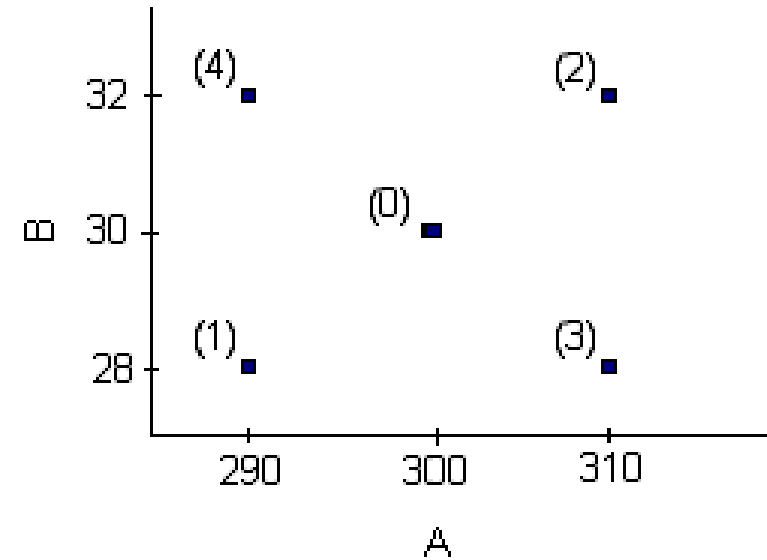
$$\frac{1}{5}[(0) + (1) + (2) + (3) + (4)] - (0)$$

$$\frac{1}{5}[\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 - 4\bar{y}_0]$$

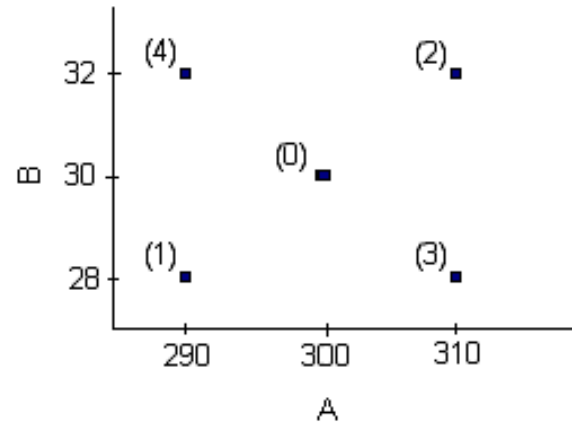
nebo

$$(0) - \frac{1}{4}[(1) + (2) + (3) + (4)]$$

$$\bar{y}_0 - \frac{1}{4}[\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4]$$

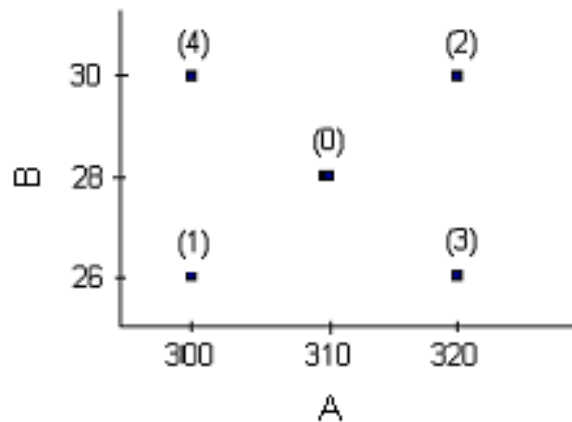


1. fáze (2 cykly)



Efekt	Konfidenční interval
Efekt A	$1,90 \pm 0,841$ ✦
Efekt B	$-1,25 \pm 0,841$ ✦
Efekt AB	$-0,05 \pm 0,841$
Efekt střední hodnoty	$0,44 \pm 0,753$

2. fáze (4 cykly)



Efekt	Konfidenční interval
Efekt A	$-0,2 \pm 0,424$
Efekt B	$-0,1 \pm 0,424$
Efekt AB	$0,4 \pm 0,424$
Efekt střední hodnoty	$-2,2 \pm 0,379$ ✦

Robustní návrh

Cíl: snížit citlivost procesu (výrobku) na kolísání rušivých veličin změnou parametrů procesu

příčiny variability procesu

proměnlivost veličin jako je např. teplota, koncentrace
rozdíly mezi jednotkami odebranými z různých pozic

odstranění kolísání nebo rozdílů mezi jednotkami v
některých případech nemožné nebo příliš nákladné
redukce variability pomocí vhodného nastavení jiných,
snadněji ovladatelných veličin

dvě skupiny faktorů

řiditelné faktory (v normálním procesu i během experimentu
snadno ovladatelné)

rušivé faktory (ovladatelné jen během experimentu)

Příklad 6.1 (upravený)

Zkoumáme vliv faktorů na průhyb listové pružiny do nákladních aut. Je třeba snížit variabilitu kolem cílové hodnoty 8“.

Faktor	Úroveň	
	-	+
B - teplota v peci	1840 °F	1880 °F
C - doba zahřívání	23 s	25 s
D - doba přesunu	10 s	12 s
E - doba zatížení	2 s	3 s
Q - teplota olejové lázně	130-150 °F	150-170 °F

B, C, D, E – říditelné faktory

Q – rušivý faktor

Návrh experimentu

2^{4-1}

	Vnitřní pole				Vnější pole	
	B	C	D	E	Q-	Q+
1	-	-	-	-	7,78	7,50
2	+	-	-	+	7,94	7,32
3	-	+	-	+	7,50	7,50
4	+	+	-	-	7,56	7,18
5	-	-	+	+	8,15	7,88
6	+	-	+	-	7,69	7,56
7	-	+	+	-	7,63	7,59
8	+	+	+	+	7,56	7,81

Originální přístup

1. V každém bodě vnitřního pole dvě charakteristiky
 - průměr
 - poměr signál/šum (S/N)
(místo S/N se doporučuje $\ln s^2$)
2. Identifikace faktorů majících vliv na
 - S/N
 - průměr (ale nikoli na S/N)
3. Určení optimálních podmínek

Poměr signál/šum

Typ odezvy „menší je lepší“

$$-10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n y_{ij}^2\right)$$

Typ odezvy „větší je lepší“

$$-10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{1}{y_{ij}^2}\right)$$

Typ odezvy „nominální je nejlepší“

$$10\log\left(\frac{\bar{y}_i^2}{s_i^2}\right)$$

Vyhodnocení

Odezva	Efekt						
	B	C	D	E	BC	BD	BE
<i>SN</i>	-0,334	9,268	-4,568	2,941	-2,300	3,452	-5,189
Průměr	0,221	-0,176	-0,029	0,104	-0,017	-0,020	-0,035

Odezva *SN*

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
C	1	171,80	171,80	171,80	6,99	0,038
Error	6	147,53	147,53	24,59		
Total	7	319,33				

Odezva průměr

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
B	1	0,097903	0,097903	0,097903	71,04	0,001
C	1	0,062128	0,062128	0,062128	45,08	0,003
E	1	0,021528	0,021528	0,021528	15,62	0,017
Error	4	0,005513	0,005513	0,001378		
Total	7	0,187072				

Příklad 6.2

Zkoumáme vliv pěti faktorů na zesílení tranzistoru. Zesílení by mělo být co nejbližší hodnotě 200.

Řiditelné faktory

A (množství příměsi),

B (doba působení)

C (stupeň podtlaku)

Rušivé faktory

X (tloušťka oxidové vrstvy)

Z (teplota)

Originální přístup (Taguchi)

řiditelné faktory			rušivé faktory				vnější pole 2^2
			X	-	+	-	
A	B	C	Z	-	-	+	+
-	-	-		118,9	125,7	95,3	152,4
+	-	-		153,7	229,4	119,9	251,5
-	+	-		196,7	200,9	234,2	166,6
+	+	-		211,1	245,7	241,0	252,6
-	-	+		145,2	162,2	167,1	167,9
+	-	+		125,3	201,6	185,5	267,3
-	+	+		283,0	251,1	263,4	190,4
+	+	+		184,2	279,5	247,2	259,2

vnitřní pole 2^3

Výpočet charakteristik v bodech vnitřního pole

y_{ij}				\bar{y}	s^2	S/N
118,9	125,7	95,3	152,4	123,08	551,91	14,38
153,7	229,4	119,9	251,5	188,63	3852,92	9,65
196,7	200,9	234,2	166,6	199,60	765,42	17,16
211,1	245,7	241,0	252,6	237,60	334,81	22,27
145,2	162,2	167,1	167,9	160,60	111,75	23,63
125,3	201,6	185,5	267,3	194,93	3406,39	10,47
283,0	251,1	263,4	190,4	246,98	1595,11	15,83
184,2	279,5	247,2	259,2	242,53	1689,62	15,42

Modely pro průměr a signál/šum

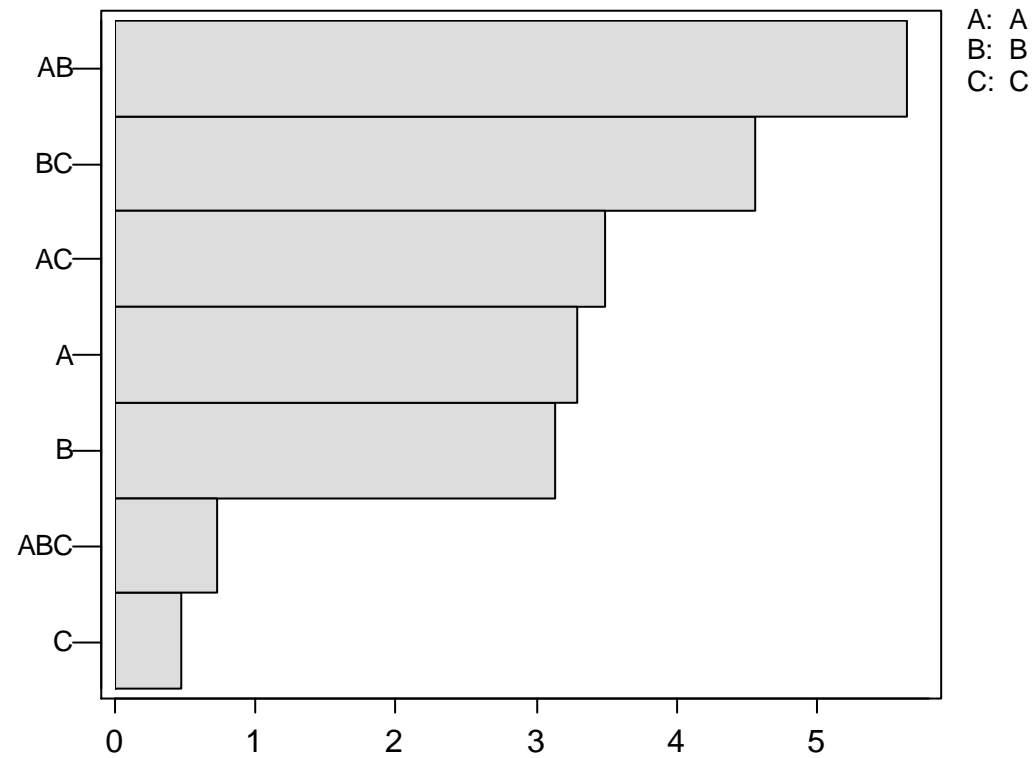
A	B	C	\bar{y}
-	-	-	123,08
+	-	-	188,63
-	+	-	199,60
+	+	-	237,60
-	-	+	160,60
+	-	+	194,93
-	+	+	246,98
+	+	+	242,53

A	B	C	S/N
-	-	-	14,38
+	-	-	9,65
-	+	-	17,16
+	+	-	22,27
-	-	+	23,63
+	-	+	10,47
-	+	+	15,83
+	+	+	15,42

Odezva – signál/šum

Pareto Chart of the Effects

(response is SN, Alpha = ,05)



Odezva – signál/šum

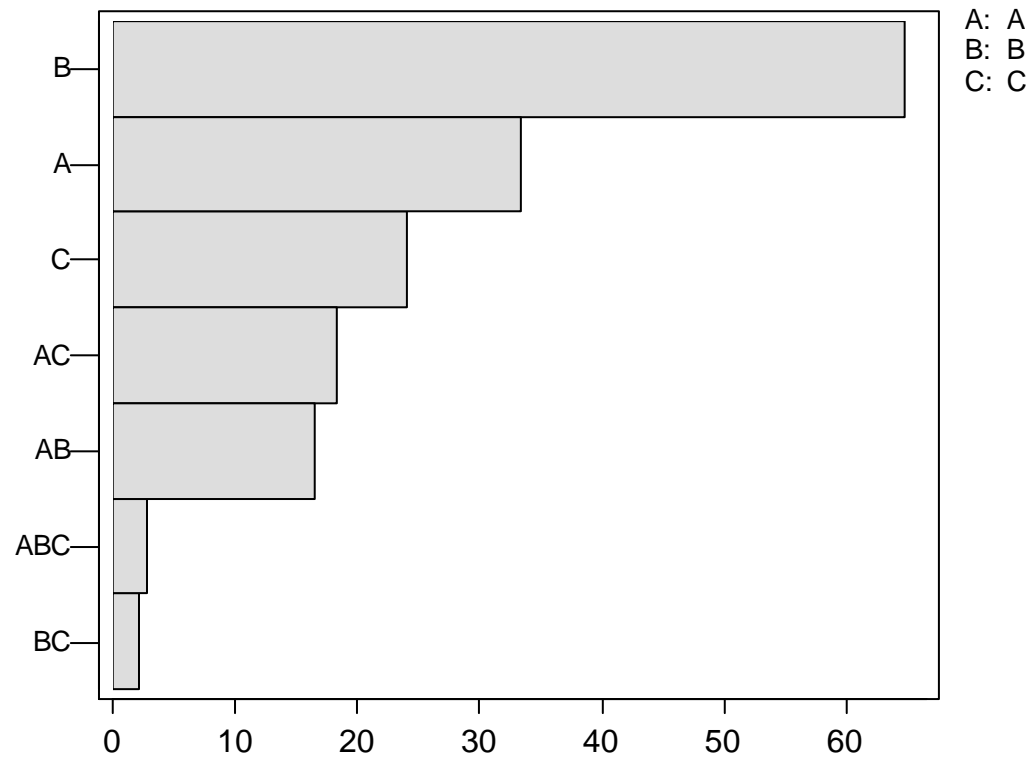
Analysis of Variance for SN						
Source	DF	SS	MS	F	P	
A	1	21,75	21,75	1,29	0,320	
B	1	19,69	19,69	1,17	0,341	
A*B	1	63,79	63,79	3,78	0,124	
Error	4	67,46	16,87			
Total	7	172,69				

Častý problém – žádný disperzní efekt není významný.

Odezva - průměr

Pareto Chart of the Effects

(response is prumer, Alpha = ,05)



Odezva - průměr

Analysis of Variance for prumer

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	2225,4	2225,4	4,62	0,084
B	1	8415,6	8415,6	17,47	0,009
Error	5	2408,3	481,7		
Total	7	13049,3			

Hlavní efekt faktoru B je významný – změnou úrovně faktoru dosáhneme změny střední hodnoty.

Alternativní přístup - model odezvy

Do modelu zařadíme

- hlavní efekty říditelných faktorů + jejich interakce
- hlavní efekty rušivých faktorů
- interakce říditelných a rušivých faktorů

Vyhodnocení jako u faktoriálního návrhu

Grafy interakcí říditelného a rušivého faktoru pomohou určit vhodnější úroveň říditelných faktorů

Příklad 3 -Tabulka ANOVA

Analysis of Variance for y					
Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	8901,1	8901,1	15,78	0,001
B	1	33663,6	33663,6	59,66	0,000
C	1	4620,0	4620,0	8,19	0,011
A*B	1	2199,5	2199,5	3,90	0,066
A*C	1	2714,0	2714,0	4,81	0,043
B*C	1	35,9	35,9	0,06	0,804
X	1	5840,1	5840,1	10,35	0,005
Z	1	678,0	678,0	1,20	0,289
X*Z	1	478,2	478,2	0,85	0,371
A*X	1	11457,2	11457,2	20,31	0,000
A*Z	1	1801,5	1801,5	3,19	0,093
B*X	1	6667,2	6667,2	11,82	0,003
B*Z	1	634,6	634,6	1,12	0,305
C*X	1	179,1	179,1	0,32	0,581
C*Z	1	223,1	223,1	0,40	0,538
Error	16	9027,7	564,2		

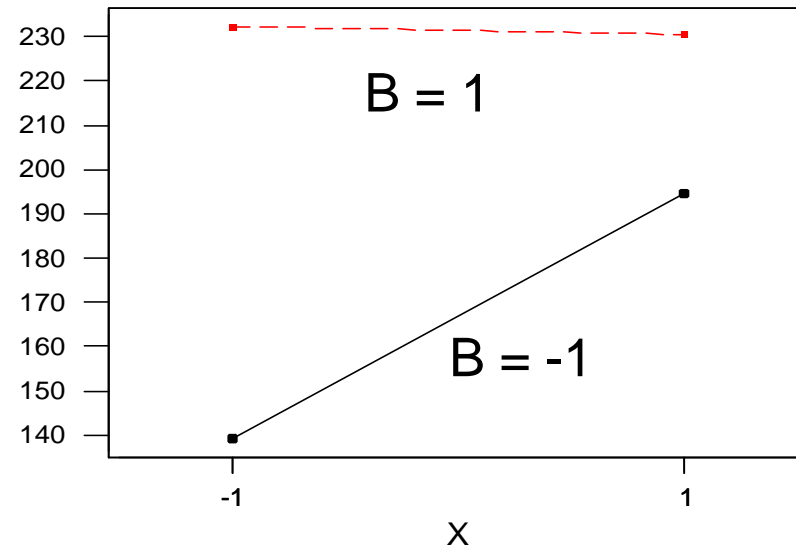
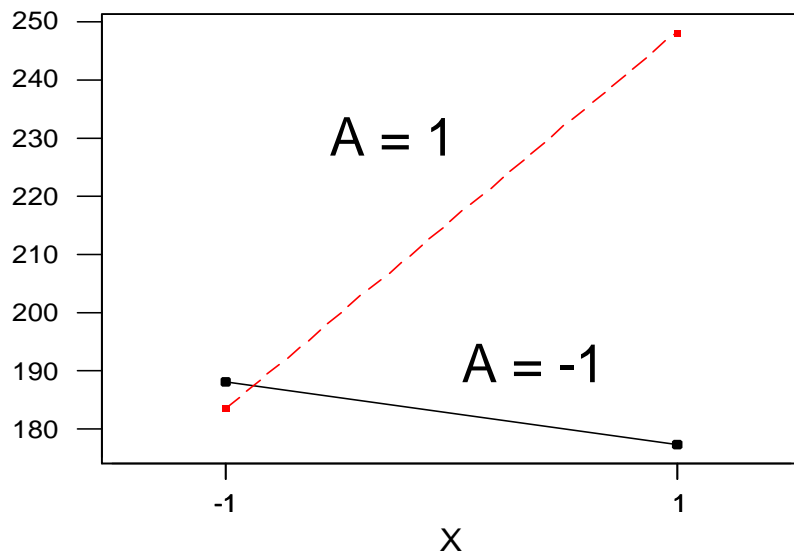
Tabulka ANOVA po odstranění nevýznamných efektů

Analysis of Variance for y					
Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	8901	8901	12,38	0,002
B	1	33664	33664	46,83	0,000
C	1	4620	4620	6,43	0,018
X	1	5840	5840	8,12	0,009
A*X	1	11457	11457	15,94	0,001
B*X	1	6667	6667	9,27	0,005
Error	25	17972	719		
Total	31	89121			

Model odezvy

$$\hat{y} = 199,24 + 16,68A + 32,42B + 12,02C + 13,51X + 18,92AX - 14,43BX$$

Grafy interakcí říditelného a rušivého faktoru



Při úrovni $A = -1$ a $B = 1$ je vliv rušivého faktoru X menší.

KONEC

