



Národní informační středisko pro podporu kvality



Seminář ČSJ

Odborná skupina statistické metody

15.3.2012

Praha



Nejistoty měření v teorii a praxi

Doc. Ing. Olga Tůmová, CSc.



O měření 1

- **Ve 20. století jsou citována slova dalšího významného vědce Johna von Neumanna:**

„Jediné, co je jisté v experimentu, je výstupní (sekundární) informace z měřicího řetězce, z které se naší ideovou konstrukcí a transformací dobíráme k požadované primární informaci na vstupu měřicího řetězce.“



O měření 2

- Na měření jako technickou disciplínu je možno se dívat ze dvou hledisek.
- Na jedné straně to je **teorie poznání**, na druhé straně **teorie informací**.
- Odtud také vyplývá dosavadní nejednotnost v definování předmětu měření:
- a) **proces kvantifikativního určení**
dané veličiny v jednotkách kvalitativně stejné veličiny (např. elektrický proud procházející vodičem v ampérech), výsledek měření uvádí jako součin číselné hodnoty a rozměru.
- b) **proces jisté transformace**
tvaru vstupní informace na jiný tvar výstupní informace.



O měření 3

- Měření je obvykle chápáno jako proces extrakce jisté informace z daného signálu.
- V jednoduchém případě jde např. o stanovení velikosti jisté (měřené) veličiny (např. efektivní hodnota střídavého proudu).
Přitom by vždy měla být jistým způsobem oceněna kvalita tohoto procesu (chyby, nejistoty apod.).



Nejistoty měření a měřicích přístrojů



Nejistoty měření – historie 1

- začátek r. 1977:
 - poznání, že neexistuje jednotný mezinárodně uznávaný přístup k provádění odhadů a stanovování nejistot měření vedl k tomu, že **Mezinárodní výbor pro míry a váhy** (CIPM) přidělil **Mezinárodnímu úřadu pro míry a váhy** (BIML) zakázku na vyřešení tohoto problému.
- r. 1980 doporučení INC-1 (Technická poradní skupina organizace ISO - TAG4)
„**Vyjadřování experimentálních nejistot**“
 - Toto doporučení bylo schváleno **CIPM** 1986



Nejistoty měření – historie 2

- Společný výbor pro Pokyny v metrologii - **JCGM**:
 - OIML Mezinárodní organizace pro legální metrologii
 - ISO Mezinárodní organizace pro normalizaci
 - IEC Mezinárodní elektrotechnická komise
 - ILAC Mezinárodní organizace pro spolupráci v oblasti akreditace laboratoří
 - IFCC Mezinárodní federace klinické chemie a lab.medicíny
 - IUPAC Mezinárodní unie pro čistou a aplikovanou chemii
 - IUPAP Mezinárodní unie pro čistou a aplikovanou fyziku



Nejistoty měření – zdroje definic, používaných termínů a pojmů 1

Společné vydání 1.pracovní skupiny

BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP a OIML:

- **Pokyn pro vyjadřování nejistoty v měření**
(Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement – GUM)
 - 1. vydání 1993
 - 2. vydání 1995

 - ISO/IEC Pokyn 98-1:2009 (totožný s JCGM 104:2009)



Nejistoty měření – zdroje definic, používaných termínů a pojmů 2

Společné vydání 2.pracovní skupiny

BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP a OIML

- OIML VIM 1984 : Terminology in metrology
- ČSN 010115:1991 Názvosloví v metrologii

- OIML VIM 1993 : International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology
- ČSN 01 0115:1996 Mezinárodní slovník základních a všeobecných termínů v metrologii (oprava 1:2002)



Nejistoty měření – zdroje definic, používaných termínů a pojmů 3

Společné vydání 2.pracovní skupiny

BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP a OIMLVIM3:2008

- VIM 3
- TNI 01 0115:2009 **Mezinárodní metrologický slovník -
Základní a všeobecné pojmy a přidružené termíny**
- **Připravuje se VIM 4**



Nejistoty měření – obecné pojmy

- Existuje celá **řada vlivů**, která se u probíhajícího měření projeví ve formě odchylky mezi naměřenou hodnotou měřené veličiny a její hodnotou pravou.
- **Výsledek měření** se pohybuje v určitém rozmezí kolem pravé hodnoty v závislosti:
 - na použitém měřidle,
 - na použité měřicí metodě,
 - dalších reálných faktorech měření,
 - při odstranění nejdůležitějších zdrojů systematických chyb (ty by výsledek měření značně vzdalovaly).



Nejistoty měření – obecné pojmy

- **Interval** (rozmezí), který je možné racionálně přiřadit, nazýváme **nejistota měření** (a je vázán na číselně danou hodnotu pravděpodobnosti pokrytí neznámé pravé hodnoty tímto intervalem).
- Teoreticky jsou meze $(-\infty, +\infty)$.
- **Definice nejistoty podle GUM a VIM:**
„Parametr přidružený k výsledku měření, který charakterizuje rozptýlení hodnot, jež by mohly být důvodně přisuzovány k měřené veličině“



Nejistoty měření – obecné problémy

- **Vyhodnocování měření je neustálý proces, kde se uplatňují:**
 - **precizní vstupní analýza,**
 - **zabezpečení informačních zdrojů,**
 - **sběr dat,**
 - **osoba dobře seznámená s technikami analýzy zdrojů nejistot (zkušenost v oblasti statistických metod).**



Nejistoty měření a normy

Výsledek měření má být uváděn s adekvátní nejistotou měření:

- Normy řady ČSN ISO 9000:2001
- Norma ČSN ISO 10012:2005
- ČSN ISO/IEC 17025:2005



Nejistoty měření a požadavky posuzovatelů

- Upozornění:

Požadavky posuzovatelů nelze někdy v konkrétních případech splnit:

- široké spektrum různých výrobků,
- požadavky na rozsah a skladbu měření se stále mění,
- měření specifického (např. dynamického) charakteru, která silně závisejí na prostředí.



Nejistoty měření – klasický přístup podle GUM

- Všechny složky nejistoty jsou vyjádřeny pomocí směrodatné odchylky,
- Předpoklad, že všechny systematické chyby jsou korigovány a případné nejistoty v souvislosti s těmito systematickými chybami jsou nejistoty těchto korekcí.
- Pokud nelze systemat. chyby korigovat, pak musí být stanovena nejistota s nimi spojená,
- Všechny intervaly nejistot jsou symetrické.



Nejistoty měření – dílčí složky

Dělení nejistot podle zdrojů nebo příčin jejich vzniku:

- **Typ A** (řešené způsobem A)

- místní zdroje nejistot měření,
- souvisí s vlastní realizací experimentu.

- **Typ B** (řešené způsobem B)

- jiné, zpravidla externí zdroje,
- vznikají v důsledku náhodných chyb a odchylek v jiných procesech měření, které mají s daným měřením souvislost (např. kalibrace měřidla).



Nejistoty měření – A

■ 3 základní kategorie nejistot - A:

- ty, které se projevují v průběhu času a nejsou závislé na čase (chyby za podmínek opakovatelnosti a reprodukovatelnosti),
- nejistoty způsobené specifickými podmínkami měření,
- nejistoty způsobené náhodnou nehomogenitou materiálu.



Nejistoty měření – A

- **Při vyhodnocování nejistot řešených způsobem A**
- Většinou předpokládáme, že nejlépe popisuje vstupní veličinu X :
 - Gaussovo rozdělení hustoty pravděpodobnosti,
 - je-li malý počet hodnot indikací, může být uvažováno t -rozdělení
 - Např. průběh t -rozdělení se 4 stupni volnosti je již velmi podobný Gauss.rozdělení
 - Jestliže hodnoty nejsou získány nezávisle, použije se jiných předpokladů o rozdělení

Nejistoty měření – A

- Výběrová směrodatná odchylka výběrových průměrů:

$$u_{AX} = s(\bar{X}) = \sqrt{\frac{s^2(X_i)}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

- tato nejistota se získá z n opakovaných měření



Nejistoty měření – A

- Je-li počet měření $n < 10$,
výběrová směrodatná odchylka výběrových průměrů se násobí koeficientem $k(s)$, není-li možno udělat jiný kvalifikovaný odhad.

$$u_{(AX)} = k_{(s)} \cdot s,$$

- kde $k(s)$ je koeficient, jehož hodnota závisí na počtu měření.



Nejistoty měření – A

■ Počet měření

9 8 7 6 5 4 3 2

■ koeficient $k(s)$

1,2 1,2 1,3 1,3 1,4 1,7 2,3 7,0

Závislost koeficientu $k(s)$ na počtu měření



Nejistoty měření – B

Kategorie zdrojů nejistot řešené způsobem B:

- měřidla a etalony kalibrované v jiných laboratořích,
- fyzikální konstanty používané při výpočtu výsledné hodnoty,
- vlivy prostředí, které nemohou být vyšetřeny statisticky,
- možné odlišnosti v uspořádání měřidel a při realizaci měřicího procesu,
- nedostatek rozlišovací schopnosti měřidla.



Nejistoty měření – B

Kategorie zdrojů nejistot řešené způsobem B:

- Vhodné pravděpodobnostní rozdělení vstupních veličin X (*zdroje nejistot*),
- Vytvoření modelu pro výstupní veličinu Y .

Nejistoty měření – B

Obecně se odhad $u_{(ZJ)}$ provádí následujícími kroky:

- odhadne se maximální rozsah změn $z_{(J,MAX)}$ od nominální hodnoty veličiny příslušející zdroji Z_J ,
- posoudí se průběh pravděpodobnosti odchylky v tomto intervalu a najde se nejvhodnější aproximace (typ rozdělení),
- dílčí nejistota typu B se určí z maximální změny daného zdroje $Z_{J,MAX}$:

$$u_{ZJ} = \pm \frac{\Delta z_{J,MAX}}{\chi}$$

- kde χ má hodnotu podle typu pravděpodob.rozdělení.

Nejistoty měření – B

χ má hodnotu podle typu rozdělení :

Typ rozdělení	změna z_{MAX}	koeficient χ	Poznámky
normální	A	3	pro P = 0,997
normální	B	2	pro P = 0,95
rovnoměrné	A	$\sqrt{3}$	pro P = 0,95
trojúhelníkové - Simpsonovo	A	$\sqrt{6}$	pro P = 0,95
bimodální – trojúhelníkové	A	$\sqrt{2}$	pro P = 0,95
bimodální – Diracovo	A	1	pro P = 0,95
lichoběžníkové	a, b = a/3 a, b = a/2 a, b = 2a/3	2,32 2,19 2,04	kde a, b jsou délky rovnoběžných stran lichoběžníku



Nejistoty měření – B

- **Rovnoměrné rozdělení**
- se použije v případech, kdy se kterákoliv odchylka od jmenovité hodnoty může vyskytovat se stejnou pravděpodobností.
Tj. nejčastější aproximace v praxi.
- **Při postupu B je často jedinou dostupnou informací určitý interval $[a, b]$, pak bývá znalost o veličině charakterizována rovnoměrným rozdělením**



Nejistoty měření – B

- **Aproximace normálním nebo trojúhelníkovým rozdělením**
- se použije, pokud se častěji vyskytují malé odchylky od jmenovité hodnoty a s rostoucí velikostí odchylek klesá pravděpodobnost jejich výskytu.

- **Bimodální rozdělení**
- se použije např. u měřicích přístrojů, které jsou výrobcem zařazeny do určitých tříd přesnosti (ve střední třídě nejsou zařazeny přístroje s malými nebo naopak velkými chybami).

Nejistoty měření – B

- Celková nejistota řešená způsobem B se stanoví geometrickým součtem dílčích nezávislých nejistot B :

$$u_{BX} = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_{X,ZJ}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_{X,ZJ}^2 \cdot u_{ZJ}^2}$$

- kde c je převodní koeficient nutný v případech, kdy dílčí nejistoty B mají různé rozměry.

Nejistoty měření – B

- Pokud jsou některé zdroje (např. I, K) nejistot ve vzájemné korelaci, je třeba určit (odhadnout) i výběrový korelační koeficient r
- Výpočet celkové nejistoty B

$$u_{BX} = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_{X,ZJ}^2 \cdot u_{ZJ}^2 + 2ru_{ZI}u_{ZK}}$$



Kovariance

- **Kovariance je následkem existence vzájemných vazeb mezi jednotlivými zdroji nejistot.**
- Kovariance mezi odhady vlivů jednotlivých zdrojů určují, jak jsou tyto odhady vzájemně ovlivněny společnými zdroji nejistot. Navzájem závislé zdroje nejistot přispívají k výsledné nejistotě více nebo méně podle toho, jak se nejistoty vzájemně slučují. Tyto vzájemné zdroje uvažujeme z toho důvodu, aby bylo možné vliv těchto společných zdrojů zohlednit v celkové nejistotě.
- Kovariance mohou výslednou nejistotu zvětšit i zmenšit.



Kovariance

- Závisí především na jejich charakteru (zda zdroje působí souhlasně nebo opačně na dva uvažované odhady) a také na tvaru funkce, kterou jsou vázány na vstupní veličinu.
- Kovariance mezi veličinami X_i a X_j se určí podobně jako nejistoty:
- buď způsobem A nebo způsobem B.

Kovariance

- Metoda řešená způsobem A je založena na statistickém zpracování výsledků.
- způsobem A:
- Používá se tehdy, pokud máme n naměřených hodnot obou veličin.
- Odhady x_i a x_j veličin X_i a X_j jsou reprezentovány aritmetickými průměry.
- Kovariance určená způsobem A se vypočítá podle vztahu:

$$u_A(x_i, x_j) = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum (x_{ik} - \bar{x}_i) \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j)$$

Kovariance

- **Způsobem B:**
- Kovarianci lze určit z certifikátů přístrojů, literatury apod., nebo případně výpočtem.
- **Postup výpočtu:**
- Vytipování zdrojů závislostí (zdroje korelací)
- Pro každý zdroj každé dvojice odhadů se odhadne korelační koeficient.
- Příslušná hodnota kovariance se určí ze vztahu:

$$u_B(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u_B(x_i) \cdot u_B(x_j)$$

Nejistoty měření – standardní nejistota

■ Kombinovaná standardní nejistota $u(c)$

udává interval, ve kterém se při normálním rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ vyskytuje skutečná hodnota s pravděpodobností $P = 68,27\%$:

Je geometrickým součtem dílčích nejistot A a B :

$$u_X = \sqrt{u_{AX}^2 + u_{BX}^2} \qquad \sqrt{u_{AX}^2 + \sum_{J=1}^m c_J^2 \cdot u_{ZJ}^2}$$

Nejistoty měření – standardní nejistota

- **Kombinovaná standardní nejistota $u(c)$**
doplněná i kovariancemi řešenými způsobem A
a B:

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_A^2(x_j) + 2u_A(x_i, x_j) + u_B^2(x_i) + u_B^2(x_j) + 2u_B(x_i, x_j)}$$



Nejistoty měření – rozšířená nejistota U

$$U = k(u) \cdot u,$$

kde $k(u)$ = koeficient rozšíření (pokrytí)

Závisí na:

- předpokládané šířce intervalu,
 - rozdělení hustoty pravděpodobnosti.
- Pro normální rozdělení: $k = 2$ pravděpodobnost pokrytí dané hodnoty tomto intervalu = 95%

Nejistoty měření – rozšířená nejistota U

*Hodnoty koeficientu
rozšíření k_U v závislosti na
intervalu rozdělení hustoty
pravděpodobnosti $N(\mu, \sigma^2)$*

Rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ pravděpodobnost P (%)	Koeficient rozšíření k_U (-)
68,27	1
95,45	2
99,00	2,58
99,73	3



Nejistoty měření

- V rámci WECC platí dohoda, že se používá koeficient rozšíření $k(u) = 2$, tzn., že pravá hodnota se nachází v daném intervalu normálního rozdělení s pravděpodobností $P = 95\%$.

Zápis výsledku:


hodnota \pm rozšířená nejistota ($k = 2$)

Rozšířená nejistota se obvykle udává s přesností na 2 platné číslice (např. 0,0062).



Chyby a nejistoty analogových přístrojů

- Výrobce garantuje určité meze chyb měřicích přístrojů (tzv. chyby základní), pokud jsou tyto přístroje používané podle stanovených metrologických požadavků a za specifických podmínek udaných výrobcem.
- Pokud nejsou nebo nemohou být dodrženy podmínky stanovené výrobcem, dochází k přídavným chybám, které mohou i několikanásobně převýšit chyby základní.
- Chyby se vyjadřují obvykle v %, ‰ nebo ppm

- 
- **Př.: Voltmetrem o třídě přesnosti TP = 1,5 a rozsahu 300 V je naměřeno napětí 225 V.**

Jaká je největší možná dovolená absolutní a největší možná relativní chyba údaje měření?

$$\pm \Delta_U = 4,5 V$$

skutečná hodnota napětí

$$U = (225 \pm 4,5) V$$

a největší možná relativní chyba údaje tohoto měření

$$\delta_U = \pm \frac{4,5}{225} 100 = \pm 2 \%$$

Poznámka: pro stanovení celkové (totální) chyby měření je nutné stanovit ještě chybu metody

- **Př.: pro stejný příklad stanovíme nejistotu měření**
(pouze údaje voltmetru, nikoliv metody):

$$\text{Zdroj nejistoty} \quad \pm \Delta_U = 4,5 \text{ V}$$

Předpokládáme rovnoměrné rozdělení, proto $\chi = \sqrt{3}$

a nejistota B

$$u_{z,B} = 2,6 \text{ V}$$

Nejistota A z 15 opakovaných měření

$$u_A = 0,6 \text{ V}$$

Kombinovaná standardní nejistota

$$u_C = 2,67 \text{ V}$$

Rozšířená nejistota $U = 2 u_C = 5,34 \text{ V}$ pro $P = 95 \%$

Výsledek měření udává interval (s $P = 95\%$):

$$U = (225,00 \pm 5,34) \text{ V}$$

$$\delta_U = \frac{5,34}{225} 100 = 2,37\%$$



Chyby digitálních přístrojů

- **Spojité analogový signál je pro měření digitálním přístrojem nutné upravit - vznikají chyby:**
- **Chyba vzorkováním** – vzniká vlivem zvolené vzorkovací frekvence, nutné pro věrohodnou rekonstrukci měřeného signálu (Shannonův teorém)
- **Chyba kvantováním** - závisí na rozlišovací schopnosti zvoleného A/D převodníku



Nejistoty digitálních přístrojů

- Stanovují se obdobně jako u přístrojů analogových:
- **Nejistoty řešené způsobem A** se určí z měření opakovaných za stejných podmínek opakovatelnosti
- **Nejistoty řešené způsobem B:**
 - Jednotlivé dílčí nejistoty se sečtou dle teoretického pokynu
 - stanoví se zdroje chyb
 - podle pravděpodobnostního rozdělení se určí koeficient χ , kterým se dělí hodnota zdroje chyby
 - Jednotlivé dílčí nejistoty se sečtou dle teoretického pokynu

Poté se stanoví kombinovaná nejistota a nejistota rozšířená.

Příklad nejistoty B digitálního přístroje

- **Digitální voltmetr** má pětimístný zobrazovač (99999), na rozsahu 10 V bylo změřeno 5,0000 V.
- a) výrobce stanovil základní chybu přístroje
$$\Delta = \pm (0,01 \% \text{ údaje} + 0,01 \% \text{ rozsahu})$$
- pak nejistota měření
$$u = \pm (5 \cdot 10^{-4} + 10 \cdot 10^{-4}) = \pm 1,5 \text{ mV} / \chi = 0,87 \text{ mV}$$
- b) pokud výrobce stanovil základní chybu přístroje
$$\Delta = \pm (0,01 \% \text{ údaje} + 9 \text{ kvantovacích kroků}),$$
- je nejistota měření
$$u = \pm (5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-4}) = \pm 1,4 \text{ mV} / \chi = 0,81 \text{ mV}$$



Nejistoty měření

- Je vhodné sledovat i související pojmy:
 - správnost,
 - pravdivost,
 - přesnost,
 - opakovatelnost,
 - reprodukovatelnost,
 - pravá (skutečná) hodnota.



Konec přednášky

DĚKUJI
ZA POZORNOST