Národní informační středisko pro podporu kvality

Nestandardní regulační diagramy

J.Křepela, J.Michálek

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO VŠECHNY INDIVIDUÁLNÍ HODNOTY

xi V PODSKUPINĚ

V praxi se někdy setkáváme s požadavkem sledovat všechny napozorované hodnoty v podskupině, např. formou jistého regulačního diagramu. Vhodný regulační diagram byl zahrnut v ČSN 01 0265:1960 *Statistická regulace.* Tato norma byla však již zrušena a nahrazena normami ČSN ISO, které však tento typ regulačního diagramu nezahrnují.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO VŠECHNY INDIVIDUÁLNÍ HODNOTY x_i V PODSKUPINĚ

- Do tohoto regulačního diagramu se zakreslují všechny napozorované hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$ v podskupině uvažovaného rozsahu n ($3 \leq n \leq 10$). Riziko planého poplachu je stanoveno $\alpha = 0{,}05$. Používá se dvou párů regulačních mezí:
- vnější (zásahové) horní UCL a dolní LCL ;
- vnitřní (výstražné) horní UWL a dolní LWL .
- pro zjednodušení zápisu bude použito rovněž značení
  x_A = UCL; x_{-A} = LCL;
  x_B = UWL; x_{-B} = LWL.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO VŠECHNY INDIVIDUÁLNÍ HODNOTY x_i V PODSKUPINĚ

- Signál k identifikaci zvláštní příčiny variability se vydá, nastane-li alespoň jeden z následujících jevů:
- a) nad UCL nebo pod LCL leží alespoň jedna výběrová hodnota;
- b) mezi UCL a UWL nebo mezi LCL a LWL leží alespoň dvě výběrové hodnoty.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO VŠECHNY INDIVIDUÁLNÍ HODNOTY xi V PODSKUPINĚ

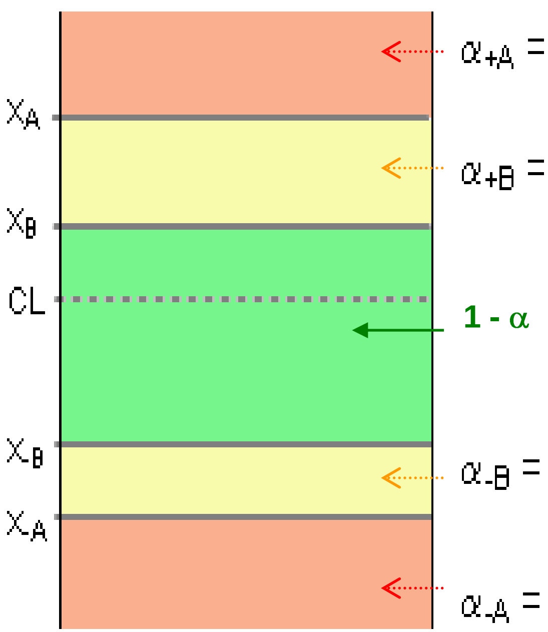
- "Technické" regulační meze („základní hodnoty“ jsou dány) se vypočítají za předpokladu, že se připouští překročení horní mezní hodnoty USL nebo nedosažení dolní mezní hodnoty LSL nejvýše s pravděpodobností p. Označíme-li cílovou hodnotu m0 a šířku tolerančního pole
- T = USL - LSL ,
- potom uvažované vnější (zásahové) regulační meze mají v souladu s ČSN tvar
- UCL = $\mu 0$ + C1p(n) T a LCL = $\mu 0$ - C1p(n) T

- a vnitřní (výstražné) regulační meze mají v souladu s ČSN tvar
- UWL = $\mu 0$ + C2p(n) T a LWL = $\mu 0$ - C2p(n) T

.
- Součinitelé C1p(n) a C2p(n) jsou v ČSN tabelovány (viz tabulky na konci kapitoly pro
  n = 3 až n = 10 a pro vybrané hodnoty p {0,02; 0,01; 0,005;0,0027}).

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO VŠECHNY INDIVIDUÁLNÍ HODNOTY xi V PODSKUPINĚ

Na následujícím obrázku jsou znázorněny uvažované oblasti a odpovídající pravděpodobnosti výskytu výběrových bodů signalizujících planý poplach.



$$\alpha_{+A} = F^{n-1}(x_A) \times \left(1 - F(x_A)\right) \times n$$

$$\alpha_{+B} = \left\{ \binom{n}{2} \times \left(F(x_A) - F(x_B)\right)^2 \times \left(1 - F(x_A) + F(x_B)\right)^{n-2} \right\}$$

$$\alpha_{-B} = \left\{ \binom{n}{2} \times \left(F(x_{-B}) - F(x_{-A})\right)^2 \times \left(1 - F(x_{-B}) + F(x_{-A})\right)^{n-2} \right\}$$

$$\alpha_{-A} = F(x_{-A}) \times \left(1 - F(x_{-A})\right)^{n-1} \times n$$

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO VŠECHNY INDIVIDUÁLNÍ HODNOTY xi V PODSKUPINĚ

- **Příklad :**
- Dáno: USL = 3,5 ; LSL = 2,5 ; n = 5 ; p = 0,0027.
- Ze zadání plyne $\mu 0 = (USL + LSL) / 2 = 3,0$;
  $T = USL - LSL = 1,0$.
- Z tabulky 1p a tabulky 2p vyhledáme
  $C1p(n) = 0,436$ a $C2p(n) = 0,333$.

- Pro p = 0,0027 je p/2 = 0,00135 a absolutní hodnota kvantilu rozdělení N(0,1) rovna $|u0,00135| = 3,0$. Tomu odpovídá $\sigma 0 = T / (2\times 3,0) = 1 / 6$.

Příklad (pokračování)

- Pro normální rozdělení N(3; (1/6)2) dostaneme kontrolní meze
  UCL = xA = 3 + 0,436 * 1 = 3,436 potom F(xA) = F(3,436) = 0,995551,
  LCL = x-A = 3 - 0,436 * 1 = 2,564 potom F(x-A) = F(2,564) = 0,004449
  a výstražné meze
- UWL = xB = 3 + 0,333 * 1 = 3,333 potom F(xB) = F(3,333) = 0,977141,
- LWL = x-B = 3 - 0,333 * 1 = 2,667 potom F(xB) = F(2,667) = 0,022859.
- Vzhledem k tomu, že regulační meze i výstražné meze jsou symetrické okolo střední hodnoty, můžeme vypočítat pravděpodobnost planého poplachu pomocí zjednodušeného výrazu:
  P(5) = 2= 2(0,02185 + 0,00321) = 0,05011.

Příklad (pokračování)

Výpočet je proveden v šabloně na přiloženém CD, soubor „Všechny jednotky v podskupině“, list „Meze podle ČSN“. V této šabloně se vypočítají automaticky kontrolní i výstražné meze pro riziko planého poplachu a = 0,05. Zadané hodnoty p, n, USL a LSL se zapíšou do žlutě vybarvených buněk. Ostatní buňky nesmí být přepisovány, některé obsahují vzorce.

Šablona pro výpočet mezí

Riziko planého poplachu α = 0,05 při využití koeficientů $C_{1p}(n)$ a $C_{2p}(n)$

μ_0 =		3
T =		1
σ_0 =		0,1667
p =	**0,00270**	
p/2 =		0,00135
n =	**5**	
USL =	**3,5**	
LSL =	**2,5**	

	vypočtené		
UCL = x_A	**3,436**	$F(x_A)$ =	0,995551
UWL = x_B	**3,333**	$F(x_B)$ =	0,977141
LCL = x_{-A}	**2,564**	$F(x_{-A})$ =	0,004449
UWL = x_{-B}	**2,667**	$F(x_{-B})$ =	0,022859

α = 0,05011

Tabelované koeficienty

$C_{1p}(n)$ =	0,436
$C_{2p}(n)$ =	0,333

ČSN 01 0265: 1960 *Statistická regulace*

Koeficienty $C_{1p}(n)$

n	p = 0,02	0,01	0,005	0,0027
3	0,525	0,474	0,435	0,407
4	0,546	0,493	0,453	0,424
5	0,563	0,508	0,466	0,436
6	0,575	0,519	0,476	0,446
7	0,587	0,530	0,486	0,455
8	0,596	0,538	0,494	0,462
9	0,604	0,545	0,500	0,468
10	0,611	0,552	0,506	0,474

Koeficienty $C_{2p}(n)$

n	p = 0,02	0,01	0,005	0,0027
3	0,373	0,337	0,309	0,289
4	0,406	0,366	0,336	0,315
5	0,429	0,388	0,356	0,333
6	0,447	0,404	0,371	0,347
7	0,462	0,417	0,383	0,358
8	0,474	0,428	0,393	0,368
9	0,484	0,437	0,401	0,376
10	0,494	0,446	0,409	0,383

Pro vypočítané meze symetrické:

$\alpha = 2(\alpha_A + \alpha_B)$ = 0,05011

α_A = 0,02185

α_B = 0,00321

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Statistické řízení procesů (SPC) na základě statistické regulace vychází především z regulačních diagramů Shewhartova typu, opírajících se o ČSN ISO 8258 „*Shewhartovy regulační diagramy*". V praxi se však často vyskytují případy, které uvedená ČSN ISO nepokrývá. Jedná se zejména o regulační diagram pro minimální, resp. maximální hodnoty v podskupině.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Tento typ regulačního diagramu, regulační diagram pro minimální xmin = $x_{(1)}$ hodnotu, nebo maximální xmax = $x_{(n)}$ hodnotu v podskupině (náhodném výběru) rozsahu n byl zahrnut v ČSN 01 0265, která byla v roce 1995 zrušena, ale v praxi má stále svůj význam, protože umožňuje sledovat polohu i variabilitu v jednom diagramu, zejména v případech, kdy je předepsána jen jedna mezní hodnota.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Rozdělení nejmenších a největších hodnot v náhodném výběru

Budeme uvažovat případy, kdy výběr pochází z rozdělení majícího spojitou distribuční funkci F (x) a hustotu pravděpodobnosti f (x).

Z odborné literatury plyne, že distribuční funkce a hustoty pravděpodobnosti nejmenší hodnoty x(1) a největší hodnoty x(n), pro $-\infty < x < \infty$ v náhodném výběru rozsahu n jsou

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Vzorce pro distribuční funkce a hustoty

$$F_{(1)}(x) = 1 - \left[1 - F(x)\right]^{n}$$

$$f_{(1)} = n f(x) \left[1 - F(x)\right]^{n-1}$$

$$F_{(n)}(x) = \left[F(x)\right]^{n}$$

$$f_{(n)} = n f(x) \left[F(x)\right]^{n-1}$$

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Regulační diagramy, v tomto případě, budou zahrnovat pouze jednu kontrolní, regulační, mez na úrovni příslušného a-kvantilu x(n), a rozdělení minimálních, resp. (1-a)-kvantilu x(n),1-a rozdělení maximálních hodnot. Volená pravděpodobnost a je v tomto případě rizikem planého poplachu, tedy v případě regulačních diagramů Shewhartova typu je a = 0,00135.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Nyní můžeme vypočítat meze v regulačních diagramech pro nejmenší a největší hodnoty v podskupinách stejného rozsahu n.

A) Přirozená dolní regulační mez pro xmin se vypočítá ze vztahu:

$$LCLMIN = \mu - \sigma \, U1\text{-}\alpha(n) .$$

Přirozená horní regulační mez pro xmax se vypočítá ze vztahu:

$$UCLMAX = \mu + \sigma \, U1\text{-}\alpha(n) .$$

U1-α(n) jsou výše odvozené (1-α)-kvantily rozdělení maximálních hodnot v náhodných výběrech rozsahu n ze základních souborů s rozdělením N(0, 1). Parametry m a s jsou odhadovány běžným způsobem z podskupin.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

B) „Technická“ dolní regulační mez pro xmin se vypočítá ze vztahu:

$$LCLMIN = X0 - \sigma 0\ U1\text{-}\alpha(n)\ ,$$

„Technická“ horní regulační mez pro xmax se vypočítá ze vztahu:

$$UCLMAX = X0 + \sigma 0\ U1\text{-}\alpha(n)\ .$$

U1-α(n) jsou opět (1-α)-kvantily rozdělení maximálních hodnot v náhodných výběrech rozsahu n ze základních souborů s rozdělením N(0, 1). Parametry X0 a σ0 jsou dané, nebo známé hodnoty.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Příklad

Uvažujme proces, ve kterém sledovaný znak jakosti má normální rozdělení s parametry $\mu = 3$ a $\sigma = 0,3$. Potom pro $n = 25$ a $\alpha = 0,00135$ je α-kvantil rozdělení nejmenších hodnot ve výběru rozsahu $n = 25$ roven $x(25), 0,00135 = 1,838$.

Dolní regulační mez pro nejmenší hodnotu ve výběru v tomto případě je

$$LCL = 1,838.$$

Ta by mohla být překročena pouze s pravděpodobností 0,00135, tj. zhruba v jednom ze 740 výběrů.

Shodný výsledek obdržíme s použitím výše uvedené tabulky:

$LCLMIN = \mu - U1\text{-}\alpha(n)\ \sigma$,

kde dosadíme $U\alpha(n) = U0,00135(25) = 3,8717$; $\mu = 3$ a $\sigma = 0,03$.

Potom

$$LCLMIN = 3 – 3,8717*0,3 = 1,838.$$

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Příklad

V praxi je možno se setkat s případem, kdy je stanovena horní mezní hodnota USL, nebo dolní mezní hodnota LSL a pravděpodobnost rizika a jejího překročení v dávkách rozsahu N.

Jedná se často o malé dávky rozsahu N, ve kterých se nesmí vyskytnout jednotky pod dolní mezní hodnotou LSL více jak s rizikem a .

Výroba je dlouhodobě stabilizovaná, se znakem jakosti s rozdělením blízkým normálnímu rozdělení a se známou, v čase se neměnící směrodatnou odchylkou s0. Úkolem je nastavit proces, z ekonomických důvodů, co nejblíže dolní mezní hodnotě

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Vyjdeme-li z výše diskutované metody, potom LCLMIN nahradíme LSL a je třeba vypočítat parametr m0 tak, aby

$$LSL = m0 - \sigma 0\ U1\text{-}\alpha(N)$$

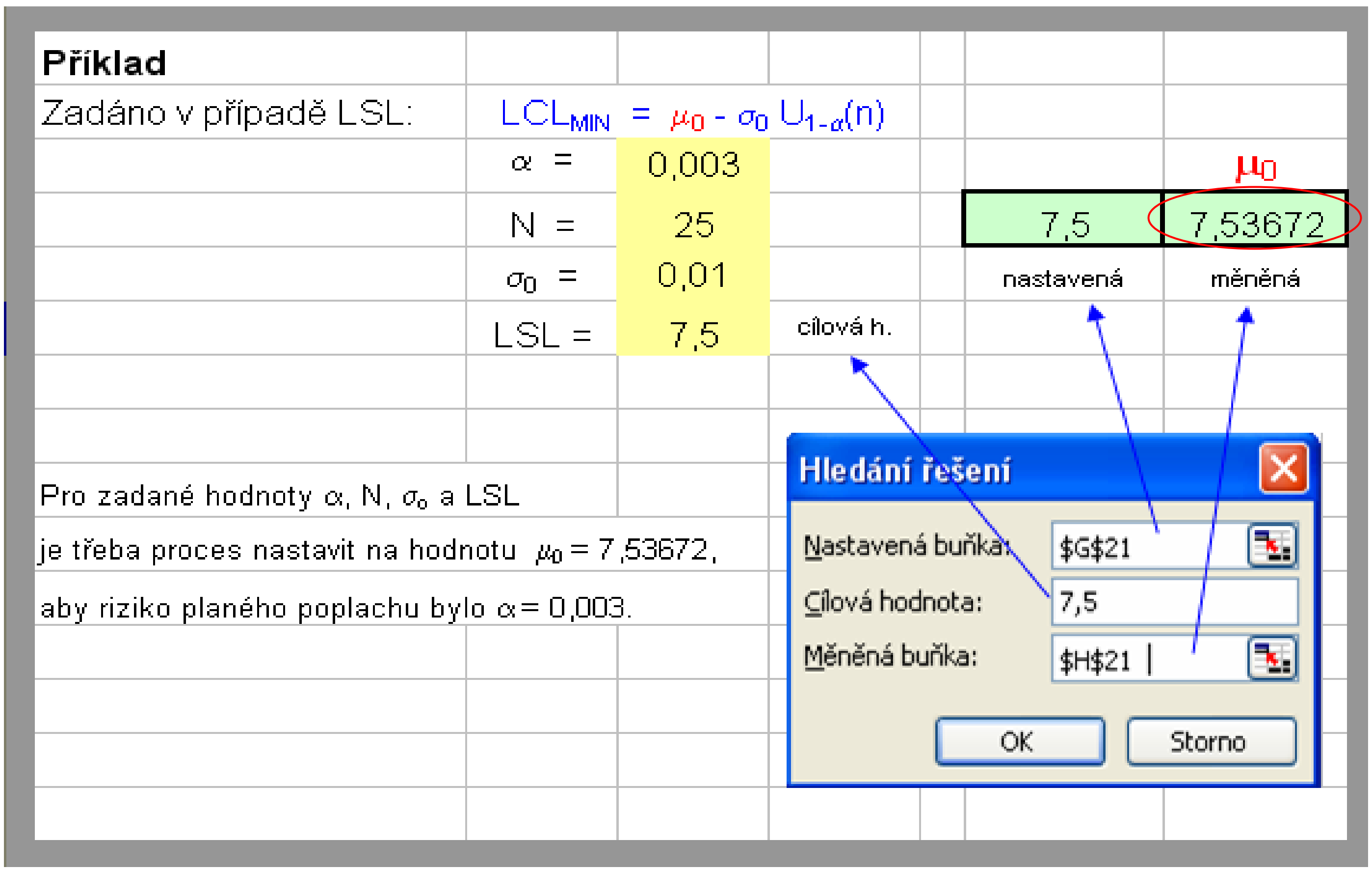
pro dané hodnoty LSL = 7,5; σ0 = 0,01; a = 0,003 a N = 25. K řešení využijeme nástroje MS Excel, „Hledání řešení“. Výpočet je proveden v Excelu pomocí šablony.

V tomto případě je optimální nastavení procesu, po zaokrouhlení na 3 desetinná místa, na hodnotu

m0 = 7,537.

REGULAČNÍ DIAGRAM PRO MINIMÁLNÍ, NEBO MAXIMÁLNÍ, HODNOTY V PODSKUPINĚ

Ukázka výstupu ze šablony



VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

V praxi se běžně používá statistické řízení procesů (SPC) na základě statistické regulace. Ta vychází z regulačního diagramu, do kterého je zakreslena vypočtená centrální přímka (CL), horní regulační mez (UCL) a dolní regulační mez (LCL). Základní ideu pro výpočet těchto přímek tvoří ČSN ISO 8258 „*Shewhartovy regulační diagramy*“ (3) které CL kladou do středu (mediánu) rozdělení sledovaného znaku jakosti, UCL a LCL do vzdálenosti plus a minus tři směrodatné odchylky od CL. Shewhartovy regulační diagramy jsou postaveny na těchto zásadách:

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

1) Rozdělení regulovaného znaku jakosti je normální se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma 2$ (směrodatnou odchylkou σ), tj. $N(\mu, \sigma 2)$.
2) Oba tyto parametry (ať známé nebo neznámé a odhadované) se v čase nemění, tj. předpokládá se statisticky zvládnutý proces, řekněme statisticky zvládnutý proces „v užším slova smyslu“.
3) Volí se rozsah podskupiny n, tj. počet jednotek, které se odebírají po každém kontrolním intervalu a budou podrobeny kontrole a výběrové charakteristiky, které se vypočtou z napozorovaných hodnot a následně se zakreslují do regulačního diagramu.

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

4) U regulace měřením se současně sleduje poloha procesu pomocí vhodně zvolené výběrové charakteristiky (výběrový průměr - , výběrový medián – Me, individuální napozorovaná hodnota xi) a variabilita procesu pomocí vhodně zvolené charakteristiky variability (výběrová směrodatná odchylka - s, výběrové rozpětí – R, klouzavé rozpětí, obvykle dvou sousedních hodnot - MR); u regulace srovnáváním se sleduje jedna, vhodně zvolená charakteristika (podíl neshodných jednotek v podskupině - p, počet neshodných jednotek v podskupině - np, počet neshod v podskupině - c, počet neshod na jednotku - u).

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

5) Riziko, že výběrová charakteristika (výběrový bod) padne náhodně mimo jednu regulační mez (UCL nebo LCL) je α = 0,00135 (v průměru se tak stane jednou ze 740 výběrů). Toto riziko se běžně nazývá rizikem „planého poplachu“. V podstatě UCL je rovna hornímu, 0,99865 kvantilu, který označíme U0,99865, LCL je rovna dolnímu, 0,00135 kvantilu, který označíme L0,00135 a centrální přímka CL odpovídá mediánu, tedy 0,5 kvantilu, který označíme Me0,5. V případě Shewhartových regulačních diagramů se uvažované kvantily pro normalizované normální rozdělení N(0, 1) označují U0,99865 = u0,99865, L0,00135 = u0,00135 a Me0,5 = u0,5. Obecně pro riziko planého poplachu a (v tomto případě a = 0,00135), také u 1-a a u a.

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

6) Neuvažuje se druhá možná situace, tj. riziko, že výběrový bod padne mezi regulační meze, i když došlo k působení zvláštní příčiny variability. Toto riziko se značí β a nazývá rizikem „chybějícího signálu“.

Dále se budeme zabývat pouze metodami statistické regulace při kontrole měřením, i když analogické úvahy lze provést i pro případ kontroly srovnáváním.

V bodě 2) se hovoří o „statistickém zvládnutí procesu v *užším slova smyslu*“, což znamená, že Shewhartovy regulační diagramy pracují s předpokladem, že v čase se nemění ani střední hodnota sledovaného znaku jakosti, ani jeho variabilita. Tento případ se však ukazuje v praxi jako málo častý. Častěji v procesu dochází zejména ke změnám střední hodnoty sledovaného znaku jakosti z neodstranitelných příčin. Jedná se např. o změny nástroje, složitě nastavitelného procesu, opotřebení nástroje

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

Riziko, se kterým usuzujeme na přítomnost zvláštní příčiny variability, je rovno α. Velikost tohoto rizika α ovlivňuje četnost zbytečného hledání zvláštní příčiny, když ve skutečnosti neexistuje. Příliš malé riziko α, které ovlivňuje šířku regulačních mezí, snižuje citlivost signalizace přítomnosti zvláštní příčiny variability. Tato skutečnost plyne z toho, že statistická regulace umožňuje volbu rozsahu podskupiny n (z technických a ekonomických důvodů se obvykle volí n malé) a uvažuje pouze riziko α, zatím co se riziko β, riziko „chybějícího signálu“, nebere v úvahu. Vyčerpávajícím způsobem je situace pro zvolená obě rizika α i β řešena v ČSN ISO 7966 „*Přejímací regulační diagramy*“

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

Jiným řešením může být přidání „výstražných regulačních mezí“ (UWL a LWL) do regulačního diagramu, vypočítaných pro zvolené větší riziko α a porovnávání výběrových bodů jednak se „zásahovými regulačními mezemi“ (UCL a LCL) stanovenými pro obvyklé riziko α = 0,00135 a současně s „výstražnými regulačními mezemi“ (UWL a LWL) stanovenými pro větší riziko, např. pro riziko α = 0,05.

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

Výběrový bod (zjištěná hodnota výběrové charakteristiky) ležící mimo „výstražné meze“ znamená jistou „výstrahu“, nutnost věnovat procesu zvýšenou pozornost, zatímco výběrový bod mimo „zásahové meze“ znamená signál k hledání zvláštní příčiny variability. Využití „výstražných mezí“ může být různým způsobem upraveno, v závislosti na pravděpodobnosti, že se např. vyskytnou-li se dva, nebo více bodů mimo jednu, nebo druhou výstražnou mez apod. Do jisté míry se tomuto problému věnuje i ČSN ISO 7873:1995 „*Regulační diagramy pro aritmetický průměr s výstražnými mezemi*“

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

Poznámka:

Rozdělení používaných výběrových charakteristik (statistik) , Me , s , R z výběrů rozsahu n - za předpokladu normálního rozdělení N (μ , $\sigma 2$) sledované náhodné veličiny - se uvažuje normální s níže uvedenými parametry:

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

Statistika	Střední hodnota	Směrodatná odchylka
Výběrový průměr xbar	μ	$\sigma/\sqrt{n}$
Výběrová směrodatná odchylka s	$\sigma C_4(n)$	$\sigma\sqrt{(1-C_4(n)^2)}$
Výběrové rozpětí R	$\sigma d_2(n)$	$\sigma d_3(n)$

Šablony pro výpočty regulačních mezí

Ke všem třem typům regulačních diagramů byly vypracovány šablony v Excelu pro výpočet regulačních i výstražných mezí a rovněž pravděpodobností výskytu zvoleného počtu bodů mimo regulační meze či v pásmu mezi regulačními mezemi a výstražnými mezemi.

Šablony jsou k dispozici u autorů příspěvku k semináři OSSM.

VÝPOČET SHEWHARTOVÝCH REGULAČNÍCH MEZÍ PRO LIBOVOLNÉ RIZIKO

Dále budou uvedeny potřebné výpočty regulačních mezí pro obecné riziko α (a tedy i výstražných regulačních mezí) při zachování značení, uvedeném v ČSN ISO 8258. Výpočty budou provedeny pro oba v normě uvažované případy, tj. když parametry rozdělení znaku jakosti jsou stanoveny (*základní hodnoty jsou stanoveny*) a když parametry rozdělení znaku jakosti známy nejsou a musí být odhadovány (*základní hodnoty nejsou stanoveny*).